**КАК ОФОРМИТЬ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ**

**Методические рекомендации по оформлению решения задач по геометрии**

Анализ экзаменационных письменных работ показал, что качество их выполнения в значительной мере зависит от того, как ученик владеет культурой математических записей, придерживается ли определенных норм графических работ, записи решения задач и упражнений. Предлагаемые рекомендации, касающиеся оформления решений задач по геометрии, способствуют более объективному оцениванию экзаменационных работ в целом.

Решение задач по геометрии, как правило, начинается с выполнения рисунка. **Рисунок** должен помочь ученику представить те абстрактные геометрические объекты, которые даются в условии задачи, разобраться во взаимном расположении всех линий, углов, плоскостей, о которых идет речь в условии. Основные требования к рисунку:

* **Правильность.** Существует такой способ проектирования, при котором изображение фигуры подобно полученной проекции. Как правило, на рисунке изображается параллельная проекция заданного тела на плоскость рисунка, а потому обязательным является соблюдение свойств параллельного проектирования. Необходимо учитывать следующие требования к изображению линий: сплошные линии используются для изображения видимого контура, штриховые – невидимого, штрих-пунктирные – для изображения осей симметрии, осей вращения. При изображении комбинации геометрических фигур допускается изображать вписанную фигуру штриховыми линиями (как невидимую) или сплошными вдвое тоньше, чем линии видимого контура, считая вписанную фигуру прозрачной. При построении двух и более рисунков, среди которых есть такие, которые изображают часть данной фигуры, буквенные обозначения должны быть идентичными, а рисунки пронумерованы.
* **Наглядность.** Образ фигуры создает тоже впечатление, что и ее прообраз, он должен быть достаточно крупным – ¼ часть страницы, удобным для решения задачи.
* **Простота построения.** При выполнении дополнительных построений желательно не использовать сложные вспомогательные приемы. При решении задач на комбинации тел можно обойтись рисунком осевого сечения. Например, в задачах на следующие комбинации тел: правильная пирамида с вписанным в нее шаром; конус с вписанным в него шаром; усеченный конус с вписанным в него шаром; шар с вписанным в него конусом; цилиндр с вписанным в него шаром; цилиндр с описанным около него шаром. При решении задач на комбинации многогранника и тела вращения также нет необходимости всегда выполнять полный рисунок данной комбинации, достаточно изобразить многогранник, сделать краткие пояснения к выполненному рисунку, с обязательным описанием положения центра шара и указанием его радиуса; или положения центра основания конуса, его высоты и радиуса; или положение центров основания цилиндра, его высоты и радиуса.
* **Полнота.** На рисунке должны быть размещены все элементы геометрической фигуры или ее части: линии, отрезки, углы и т.д., которые используются при решении задачи.

**Условие** задачи переписывается лишь один раз, если есть ее полная запись, то сокращенную запись делать нецелесообразно. Лишним есть также и выделение в отдельный пункт объяснения к рисунку. Это должно входить в общее объяснение, сопровождающее решение задачи, и должно быть его составляющей частью.

**В объяснениях** в первую очередь внимание обращается на логическое обоснование основных соотношений между элементами фигуры, на которых основано решение (ортогональность, параллельность прямой и плоскости, параллельность плоскостей, их свойства и т.д.). Особого внимания требуют объяснения, касающиеся непосредственно геометрической фигуры, о которой идет речь в условии задачи и взаимного расположения ее элементов (сечений сторон, ребер, граней, вершин, углов и т.д.). В процессе пояснения рисунка и решения задачи объяснения требуют:

* элементы, определяющие заданные фигуры (форма и расположение сечений, положение высот, медиан, биссектрис и т.д.);
* расстояние между точкой и прямой, между точкой и плоскостью, между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями, гранями;
* углы между прямой и плоскостью, линейные углы двугранных углов;
* дополнительные построения, если они выполнялись;
* положение и элементы фигуры вращения;
* взаимное положение элементов фигур, входящих в комбинации фигур и не вытекающих из соответствующих определений.

Объяснять необходимо те геометрические свойства, которые будут использоваться при решении задачи. **Исключение** составляют лишь те свойства, что являются составными элементами или вытекают из определения заданной геометрической фигуры. Приведем примеры свойств фигур, которые не требуют обоснования:

* **Для правильной пирамиды:** все боковые грани пирамиды – равные треугольники; боковые ребра равны и образуют с плоскостью основания равные углы; плоские углы при вершине пирамиды равны; двугранные углы при сторонах основания равны; равны и двугранные углы при боковых ребрах; основание пирамиды – правильный многоугольник, центр которого есть ортогональная проекция вершины пирамиды на плоскость ее основания; высота, вписанного в нее конуса совпадает с высотой пирамиды, образующие с высотами боковых граней, а окружность основания является окружностью, вписанной в основание пирамиды; высота, описанного около нее конуса совпадает с высотой пирамиды, боковые ребра пирамиды совпадают с образующими конуса, а окружность основания конуса является окружность, описанной около основания пирамиды.
* **Для призмы:** боковые грани – параллелограммы; боковые ребра – параллельные и равные отрезки; основания – равные многоугольники, лежащие на параллельных плоскостях; соответствующие стороны и углы параллелограмма равны.
* **Для конуса:** образующие равна и образуют с плоскостью основания равные углы; вершина проектируется в центр круга основания.
* **Для цилиндра:** его основания – равные между собой круги, лежащие в параллельных плоскостях; образующие равны и параллельны между собой; образующие перпендикулярны плоскости основания.

Перечисление таких свойств можно продолжить. Записывая решение задачи, следует объяснить и обосновать существенное, не увлекаться чрезмерной детализацией. Однако нельзя ограничиваться в объяснениях только записью формул и вычислениями без промежуточных выкладок. Трудно дать исчерпывающие рекомендации к каждой геометрической задачи, какие положения в процессе решения задачи следует детально обосновывать, какие можно взять как общеизвестные, а о каких достаточно лишь вспомнить. Суть состоит в том, чтобы ученики поняли необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование данного соотношения или свойства, на основании которых установлена зависимость между элементами фигур. Например, чтобы установить равенство треугольников, достаточно указать равенство соответствующих угловых и линейных элементов, гарантирующих отношение равенства без обязательной формулировки и названия самого признака. Так, при применении теоремы Пифагора и её следствий достаточно установить, что данный треугольник прямоугольный, и указать прямой угол. Без ссылок на соответствующие теоремы или следствия применяются в процессе решения задач свойства и соотношения между сторонами, углами и диагоналями параллелограмма (прямоугольника, квадрата, ромба), предварительно установив, если это неизвестно из условия задачи, вид четырехугольника. Аналогично необходимо подходить и к ссылкам на математические утверждения из стереометрии, в частности при построении проекций отрезка, прямой на плоскость, при использовании свойств параллельности (перпендикулярности) прямых и плоскостей, теоремы о трех перпендикулярах и т.д. Часто на экзаменах можно видеть, что ученик, особенно претендент на медаль, значительно больше времени тратит на оформление записей, чем на решение задачи, что превращает объяснения в самоцель, порождает формализм. Так, например, вместо того, чтобы сразу написать необходимую формулу для вычисления квадрата *а* по гипотенузе *с* и углу $∝$, то есть $a=c∙\sin(∝)$, ученики часто пишут соотношение $\frac{a}{c}=\sin(∝)$, а потом уже приведенную формулу. Или же вместо ссылки на теорему, на основании которой сделан вывод, одиннадцатиклассники полностью ее формулируют, что также загромождает работу лишним текстом, забирает время.

В действующих учебниках ряд традиционных теорем и следствий из них отнесен к так называемым базисным (опорным) задачам, часто используемых при решении многих других задач. Каждую из них нетрудно доказать, а поэтому их следует отнести к общеизвестным фактам, при обосновании достаточно указать на их очевидность с помощью слов: «известно», «очевидно», «мы знаем», «в таком случае», «поэтому» и др. Предлагаемые ниже **утверждения** на уроках геометрии должны быть доказаны и хорошо **усвоены** всеми учащимися:

1. об углах с соответственно параллельными (перпендикулярными) сторонами;
2. свойства диаметра окружности, перпендикулярного к хорде и проведенного через середину хорды;
3. о равенстве отрезков касательных от точки вне окружности до точек касания;
4. соотношение между отрезками пересекающихся хорд, отрезками секущих, проведенных из одной точки, отрезками секущей и касательной, проходящих через одну точку;
5. о величине угла между касательной и хордой, проходящей через точку касания; о величине угла между секущими, проведенными из одной точки и между пересекающимися хордами;
6. о точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;
7. о пересечении в одной точке высот треугольника;
8. свойство медиан треугольника;
9. свойство биссектрисы угла треугольника;
10. соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике;
11. формулы площади треугольника: через сторону и высоту, проведенную к ней; через две стороны и угол между ними; через три стороны (формула Герона); через радиус описанной около него окружности; через радиус вписанной в него окружности;
12. свойство противолежащих углов, вписанного в окружность четырехугольника
13. свойство сторон четырехугольника, описанного около окружности;
14. о равенстве диагоналей, равенстве углов при основании равнобедренной (равнобокой) трапеции;
15. свойство диагоналей параллелограмма;
16. формулы площади параллелограмма: через сторону и высоту, проведенную к этой стороне; через его диагонали и синус угла между ними;
17. существование и единственность прямой, перпендикулярной к плоскости;
18. о перпендикулярности прямой пересечения двух плоскостей, каждая из которых перпендикулярна третьей плоскости;
19. о плоскости, проходящей через прямую, параллельную другой плоскости;
20. о перпендикуляре, проведенном в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостях, к линии их пересечения;
21. о соотношении косинусов трех углов (угол между наклонной и ее проекцией на плоскость, угол между наклонной и прямой, проведенной через основание наклонной в данной плоскости, угол между этой прямой и проекцией данной прямой соответственно);
22. формула площади боковой поверхности и объема усеченной пирамиды;
23. формула объема усеченного конуса;
24. формула боковой поверхности пирамиды с равно наклоненными гранями к основанию имеет вид: $S=\frac{S\_{0}}{\cos(∝)}$, где $∝$ – величина двугранного угла при основании;
25. формула объема пирамиды, в которую можно вписать шар радиуса *r*.

При решении задач по теме «Многогранники» часто приходится пользоваться следующими утверждениями, выражающими свойства этих тел:

1. если боковое ребро призмы образует со смежными сторонами основания равные углы, то оно проектируется на биссектрису угла, образованного этими сторонами;
2. если боковое ребро призмы проектируется на перпендикуляр к какой-нибудь стороне основания, то боковая грань, содержащая эту сторону, является прямоугольником;
3. – если боковые ребра пирамиды равны,
– если боковые ребра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания,
– если равны углы между боковыми ребрами и высотой пирамиды, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около ее основания;
4. – если двугранные углы при основании пирамиды равны,
– если высоты боковых граней равны,
– если высоты боковых граней образуют равные углы с высотой пирамиды, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в ее основание;
5. если боковая грань пирамиды перпендикулярна к плоскости основания, то высота этой пирамиды лежит в этой грани и проектируется на сторону основания этой грани;
6. если боковое ребро пирамиды перпендикулярно к плоскости основания, то оно является высотой пирамиды, а грани, содержащие это ребро, перпендикулярны к основанию пирамиды;
7. если боковое ребро пирамиды образует со смежными сторонами основания равные углы, то высота пирамиды проектируется на биссектрису угла между этими сторонами;
8. высота правильной пирамиды проектируется на апофему боковой грани пирамиды;
9. если в призму (необязательно прямую) вписан шар, то
– высота призмы равна диаметру шара;
– точки касания шара с боковыми гранями лежат на сечении призмы, проходящей через центр шара перпендикулярно боковым ребрам, таким образом, точки касания боковых граней лежат на окружности большого круга шара;
10. если в призму можно вписать прямой круговой цилиндр, то призма прямая и ее боковое ребро равно образующей цилиндра, а в основании призмы можно вписать круг;
11. шар можно вписать в пирамиду, то биссектрисы линейных углов двугранных углов при основании пересекаются в одной точке – центре шара, который лежит на высоте пирамиды;
12. если в пирамиду можно вписать прямой круговой конус, то в основание пирамиды можно вписать круг, а высота пирамиды проходит через центр этого круга. Касание в этом случае происходит по образующим конуса, идущим в точки касания со сторонами основания; эти образующие служат высотами боковых граней пирамиды;
13. если призма вписана в шар, то призма прямая и около основания можно описать круг. Центр шара лежит на середине высоты, проведенной через центр описанного около основания круга;
14. если призма вписана в прямой круговой цилиндр, то она прямая и ее высота равна образующей цилиндра, а основание призмы является вписанным многоугольником в основании цилиндра;
15. если можно описать шар около пирамиды, то около ее основания можно описать круг, а центр шара лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр этого шара;
16. если пирамида вписана в прямой круговой конус, то она обладает следующими свойствами:
– боковые ребра пирамиды равны;
– боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания;
– боковые ребра образуют одинаковые углы с высотой пирамиды;
– около основания пирамиды можно описать окружность, и высота пирамиды про-ходит через ее центр;
– двугранные углы при основании пирамиды равны.

При решении задач часто возникает ряд вопросов касающихся **ответа**, т.е. конечного результата. Остановимся на них.

Во-первых, исследование полученной в процессе решения формулы не является обязательным. Выполняется оно лишь тогда, когда такое требование предусмотрено условием задачи или возникает необходимость во время отдельных преобразований выражений, например, необходимо опустить знаки абсолютной величины выражений, под знаком квадратного корня стоит выражение со знаком минус и т.д.

Во-вторых. Полезно прививать ученикам умения и потребность по полученной общей формуле оценивать достоверность ответа, чтобы застраховать себя от возможных ошибок логического и механического характера.

В-третьих. Когда задача решена в общем виде, следует в формулу решения подставить значения параметров, если они даны и найти числовое значение искомой величины.

В-четвертых. В ответе записывается общая формула, а также ее числовое значение, например, ответ: 13,5 см2. Как видим в записи общей формулы, полученной в процессе решения задачи отсутствуют наименование типа «кв.ед.», «куб.ед.». Единицы наименований указываются лишь для конкретного случая, когда даны размерности параметра линейных элементов рассматриваемой фигуры.

Этими рекомендациями естественно не исчерпываются все возможные случаи письменного объяснения решения геометрических задач, но всегда нужно добиваться четкости, лаконичности и полноты записей для того, чтобы работа более полно отражала уровень и качество усвоения учеником учебного материала.